MINISTERE DE L' EDUCATION L.S.H.B.Dahmani ***** **Prof : Waili Adel**	**** ** **2022**	**BAC BLANC** ***** **MATHÉMATIQUES**

Niveau :4ème sciences techniques		Coefficient : 3	Durée : 3 heures

Exercice n°1 :($3points = 0.75\times4$)

- Pour chacune des questions suivantes **une seule** des trois réponses proposées **est exacte** .Indiquer le numéro de la question correspondant à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée.

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison **3** . la suite(e^{U_n}) est géométrique de raison
   a) Ln3 ; b)3 ; c) e^3
2) On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
   La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :
   a) 4095 ; b) 8191 ; c) $\frac{1-2^{14}}{1-2}$
3) Soit V le volume du solide obtenu par révolution autour de l'axe (ox) du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y=\sqrt{R^2-x^2}$ sur $[-R,R]$, $R>0$ .Alors :
   a) $V=\pi R^2$; b) $V=\frac{4\pi R^3}{3}$; c) $V=\frac{2\pi R^3}{3}$
4) Soit un cube ABCDEFGH tel que AB=1 ,alors l'aire du triangle CEH est :
   a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice n°2 :($6.5points = 0.5+0.5+0.5+1.5+1+1+1.5$)

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-2$

1) Dresser le tableau de variation de **g**.
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$, une unique solution α et que $0.8<\alpha<0.9$
3) Donner suivant les valeurs de x, le signe de (x) .

B) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-2x}{e^x+2}$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$
   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) en $-\infty$
   c) Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à Δ.
2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f .
   c) Montrer que $f(\alpha)=1-\alpha$.
3) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) et l'asymptote .
4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), la droite Δ et les droites d'équations $x=-1$ *et* $x=0$.
   a) Montrer que pour tout $x\in[-1,0]$ *on a* $\frac{1}{3}(x+1)e^x\le\frac{(x+1)e^x}{e^x+2}\le\frac{e^x}{e^x+2}$.
   b) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{0}(x+1)e^x\,dx$.
   c) Montrer alors que $\frac{1}{3e}\le A\le \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)$

<u>Exercice n°3 :</u> $\underline{(5points = 1 + 2 + 1 + 1)}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_1^e (lnx)^n \, dx$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$ et pour tout entier non nul on a : $(lnx)^n - (lnx)^{n+1} \geq 0$.
   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante .
2) a) Calculer I_1.
   b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   c) En déduire I_2 , I_3 *et* I_4 .
3) a) Montrer que pour tout entier non nul n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
   b) Etudier alors la convergence de (I_n) .
4) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et déduire la limite de nI_n .

<u>Exercice n°4 :</u> $\underline{(5.5points = 0.5 + 1 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1)}$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, -1, 4)$ *et* $B(-1, 0, 2)$ et le plan **P** d'équation cartésienne

$x + y - z + 3 = 0$.

On note $\mathscr{C}$ le cercle , du plan **P** , de centre **B** et de rayon $\sqrt{13}$ et S la sphère contenant $\mathscr{C}$ et passant par le point A .

A) On note $I(a, b, c)$ le centre de S .
1) Vérifier que $\notin P$ *et* $B \in P$.
2) a) Montrer que $IA^2 - IB^2 = 13$.
   b) En déduire que $2a - b + 2c = 0$.
3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan P en B .
   b) Montrer que **I** admet pour coordonnées $(1, 2, 0)$.
4) Donner une équation cartésienne de la sphère **S** .

B) Pour tout réel **m**, on considère l'ensemble S_m des points $M(x, y, z)$ tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 4my + 5(m^2 - 5) = 0$.
1) Montrer que pour tout réel **m,** S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m .
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par A .
3) Déterminer l'ensemble des points I_m quand m décrit $\mathbb{R}$.
4) Discuter , suivant le paramètre réel m , la position relative de S_m *et* P .
5) Déterminer la valeur de **m** pour laquelle S_m coupe P suivant le grand cercle .

Bon travail

CDS$_3$

Exercice n°1: 3pts

1) $U_n = U_0 + nr$

$$\frac{e^{U_{n+1}}}{e^{U_n}} = \frac{e^{U_0+3(n+1)}}{e^{U_0+3n}} = \frac{e^{U_0+3n} \cdot e^3}{e^{U_0+3n}} = e^3 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{1) \to c)}$ 0,75

2) $S = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{12} = 1 \cdot \frac{1-2^{13}}{1-2} = (2^{13}-1)$

$= 8191$

$\boxed{2) \to b)}$ 0,75

3) $V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^R (R^2-x^2)\,dx$

$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi \cdot \frac{2R^3}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$\boxed{3) \to b)}$ 0,75

4) Aire $CEH = \frac{CH \times EH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{4) \to c)}$ 0,75

Exercice n°2:

A) 1) $g(x) = xe^x - 2$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$g'(x) = 0 \iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-2	$\searrow$	$-e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{-\infty} xe^x - 2 = -2$

$\lim_{+\infty} xe^x - 2 = +\infty$

$g(-1) = -e^{-1} - 2$ 0,5

2) $g(x) \in [-e^{-1}-2, -2]$ si $x \in]-\infty, -1]$; donc $g(x) \neq 0$

sur $[-1, +\infty[$; g continue, strict $\nearrow$ donc g bijection de $[-1,+\infty[$ sur $[-e^{-1}-2, +\infty[$ qui contient 0

donc il existe $\alpha \in [-1, +\infty[$ / $g(\alpha) = 0$

$g(0,8) \times g(0,9) = -0,22 \times 0,21 < 0$ Th VI 0,5

$0,8 < \alpha < 0,9$

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

B) $f(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x + 2}$

1)a) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{2x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = 1$ 0,5

1)b) $\lim_{-\infty} f(x) + x = \lim_{-\infty} \frac{e^x - 2x}{e^x + 2} + x$

$= \lim_{-\infty} \frac{e^x - 2x + xe^x + 2x}{e^x + 2} = \frac{0}{2} = 0$ 0,5

donc $\Delta : y = -x$ asymptote à C_f en $-\infty$

1)c) $f(x) + x = \frac{(x+1)e^x}{e^x + 2}$

si $x \in]-\infty, -1]$: Δ / C_f

si $x \in [-1, +\infty[$: C_f / Δ 0,5

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{(e^x - 2)(e^x + 2) - e^x(e^x - 2x)}{(e^x+2)^2}$

$= \frac{2(xe^x - 2)}{(e^x+2)^2} = \boxed{\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}}$ 0,5

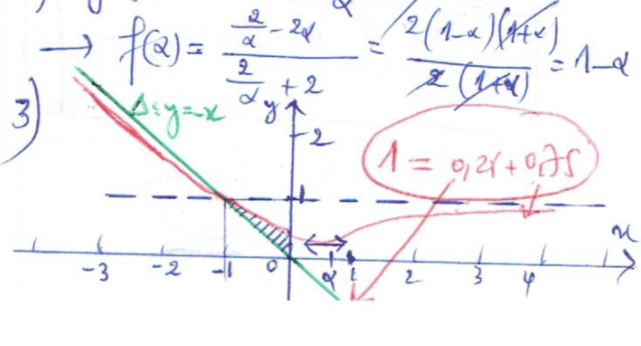
b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

c) $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha = \frac{2}{\alpha}$ 0,5

$\to f(\alpha) = \frac{\frac{2}{\alpha} - 2\alpha}{\frac{2}{\alpha} + 2} = \frac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{2(1+\alpha)} = 1 - \alpha$

3)



1 = 0,25 + 0,75

4) a) $\forall -1 \leq x \leq 0 : 0 \leq e^{-1} \leq e^{x} \leq e^{0} = 1$

$$2 \leq e^{x}+2 \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e^{x}+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+1)\,e^{x}}{3} \leq \frac{(x+1)\,e^{x}}{e^{x}+2}$$

or $x+1 \leq 1$: $\frac{e^{x}(x+1)}{e^{x}+2} \leq \frac{e^{x}}{e^{x}+2}$ 0,5

d'où $\forall x \in [-1,0]$: $\boxed{\frac{(x+1)e^{x}}{3} \leq \frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2} \leq \frac{e^{x}}{e^{x}+2}}$

b) $\int_{-1}^{0} (x+1)\,e^{x}\,dx$

$U = x+1 \longrightarrow U' = 1$

$V' = e^{x} \longrightarrow V = e^{x}$

$$\int_{-1}^{0} (x+1)e^{x}dx = \left[(x+1)e^{x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx$$

$$= 1 - \left[e^{x}\right]_{-1}^{0} = 1-(1-e^{-1}) = e^{-1}$$

d'où $\boxed{\int_{-1}^{0} (x+1)e^{x}dx = e^{-1}}$ 0,5

c) $\forall x \in [-1,0]$:

$$\frac{(x+1)e^{x}}{3} \leq \frac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2} \leq \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

or $\int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{e^{x}+2}\,dx = \left[\ln(e^{x}+2)\right]_{-1}^{0} = \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)$

d'où $\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} (x+1)e^{x}dx \leq A \leq \int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$

$$\boxed{\frac{1}{3e} \leq A \leq \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)}$$

0,5

EX3 :

1) a) $I_n = \int_{1}^{e} (\ln x)^{n}\,dx$

$\forall x \in [1,e]$: $0 \leq \ln x \leq 1$.

donc $(\ln x)^{n} \geq 0$

et $1 - \ln x \geq 0$

or $(\ln x)^{n} - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^{n}(1-\ln x) \geq 0$ 0,5

b) $I_{n+1} - I_n = \int_{1}^{e} \left((\ln x)^{n+1} - (\ln x)^{n}\right) dx \leq 0$

$\longrightarrow \boxed{(I_n) \text{ est } \searrow}$ 0,5

2) a) $I_1 = \int_{1}^{e} \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_{1}^{e} = \boxed{1}$ 0,5

b) $I_n = \int_{1}^{e} (\ln x)^{n}\,dx = \int_{1}^{e} x\,\frac{(\ln x)^{n}}{x}\,dx$

$U = x \longrightarrow U' = 1$

$V' = \frac{(\ln x)^{n}}{x} \longrightarrow V = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$ 0,25

$$I_n = \left[x\,\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_{1}^{e} - \frac{1}{n+1}\int_{1}^{e} (\ln x)^{n+1}\,dx$$

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$$

$$\boxed{I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n}$$ 0,75

c) $I_2 = e - 2I_1 = \boxed{e-2}$ 0,25

$I_3 = e - 3I_2 = \boxed{6-2e}$ 0,25

$I_4 = e - 4I_3 = \boxed{9e-24}$ 0,25

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$ et $\forall x \in [1,e]$: $(\ln x)^{n} \geq 0$

$\longrightarrow I_n \geq 0$

CDS3

EX1 : 3pts

$U_n = U_0 + 3n$

1) $\dfrac{e^{U_{n+1}}}{e^{U_n}} = \dfrac{e^{U_0+3(n+1)}}{e^{U_0+3n}} = \dfrac{e^{U_0+3n}\cdot e^3}{e^{U_0+3n}} = e^3$

$\boxed{1) \to c)}$ 0,25

2) $U_n = 1/2 \cdot 1 \cdot 2^n = 2^n$

$S_{12} = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12}$

$S = 1\,\dfrac{1-2^{13}}{1-2} = (-1+2^{13}) = 8191$

$\boxed{2) \to b)}$ 0,25

3) $V = \pi \displaystyle\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx$

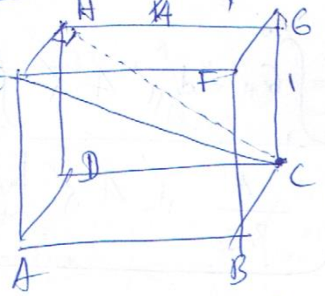
$= 2\pi \displaystyle\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx$

$= 2\pi \left[R^2 x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^R$

$= 2\pi \left[R^3 - \dfrac{R^3}{3}\right] = 2\pi \dfrac{2R^3}{3}$

$\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$ $\boxed{3) \to b)}$ 0,25

4)



Aire $CEH = \dfrac{CH \times EH}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times 1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{4) \to c)}$ 0,25

EX2 : 4,5pts $g(x) = xe^x - 2$

(A) 1) g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$g'(x) = 0 \iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-2	$\searrow$	$-e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} xe^x - 2 = -2$

$\lim\limits_{+\infty} xe^x - 2 = +\infty$

$g(-1) = \cancel{e^1} - e^{-1} - 2$ 0,5

2) $\forall x \in]-\infty, -1]$: $g(x) \in [-e^{-1}-2, -2]$ donc $g(x) \neq 0$

Sur $[-1, +\infty[$: g continue, strict $\nearrow$ donc bij de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}-2, +\infty[$ qui contient 0 donc il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ / $g(\alpha) = 0$

$g(0{,}8) \times g(0{,}9) = -0{,}22 \times 0{,}21 < 0$ $\boxed{\text{then } 0{,}8 < \alpha < 0{,}9}$ 0,5

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

(B) $f(x) = \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2}$

1)a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{2x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = 1$ 0,5

1)b) $\lim\limits_{-\infty} f(x) + x = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2} + x = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{e^x - \cancel{2x} + xe^x + \cancel{2x}}{e^x + 2}$

$= \dfrac{0}{2} = 0$

donc $\boxed{\Delta : y = -x \text{ asy à } \mathcal{C}_f \text{ en } -\infty}$ 0,5

c) $f(x) + x = \dfrac{(x+1)e^x}{e^x + 2}$

si $x \in]-\infty, -1]$: $\Delta / \mathcal{C}_f$

si $x \in [-1, +\infty[$: $\mathcal{C}_f / \Delta$ 0,5

2°a) $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2}$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 2)(e^x+2) - e^x(e^x - 2x)}{(e^x+2)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x - 2e^x - 4 - e^{2x} + 2xe^x}{(e^x+2)^2}$$

0,5 $= 0{,}25 \times 2$

$$= \frac{2(xe^x - 2)}{(e^x+2)^2} = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}.$$

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1

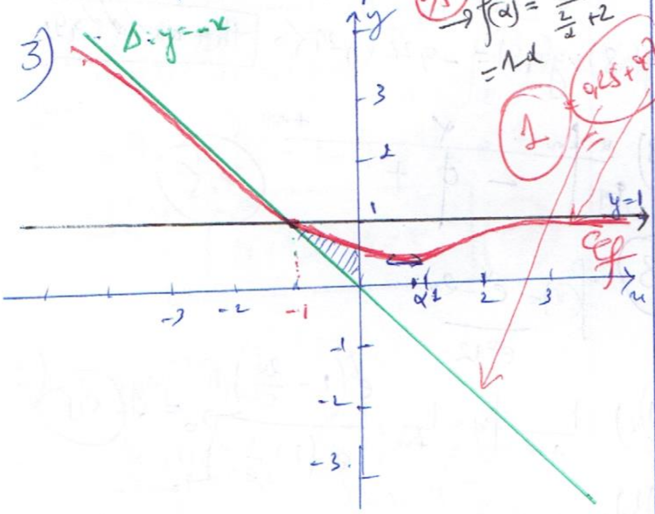
2/c $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha = \dfrac{2}{\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{2}{\alpha} - 2\alpha}{\frac{2}{\alpha} + 2} = \frac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{2(1+\alpha)} = 1 - \alpha$$

0,5

1 $= 0{,}25 + 0{,}75$

3)



4)a) $\forall -1 \leq x \leq 0;\ 0 < e^{-1} \leq e^x \leq e^0 = 1$

$$2 \leq e^x + 2 \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e^x+2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+1)e^x}{3} \leq \frac{(x+1)e^x}{e^x+2} \leq \cancel{\frac{(x+1)e^x}{2}}$$

or $x + 1 \leq 1 \quad \dfrac{e^x(x+1)}{e^x+2} \leq \dfrac{e^x}{e^x+2}$

0,5 d'où $\forall x \in [-1, 0]$: $\boxed{\dfrac{(x+1)e^x}{3} \leq \dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2} \leq \dfrac{e^x}{e^x+2}}$

b) $\cancel{\displaystyle\int_{-1}^{0} (f(x) + x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)e^x}{e^x+2}}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx$

$u = x+1 \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^x \longrightarrow v = e^x$

$$\int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx = \left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\,dx = 1 - \left[e^x\right]_{-1}^{0} = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx = e^{-1}}$$

0,5

c) $\forall x \in [-1, 0]$: $\dfrac{(x+1)e^x}{3} \leq \dfrac{(x+1)e^x}{e^x+2} \leq \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \left[\ln(e^x+2)\right]_{-1}^{0} = \ln 3 - \ln(e^{-1}+2) = \ln\frac{3}{e^{-1}+2} = \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)$$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} (x+1)e^x\,dx \leq A \leq \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$$

$$\boxed{\frac{1}{3e} \leq A \leq \ln\left(\frac{3e}{1+2e}\right)}$$

0,5

Exercice n°3 (5points)

1) a) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

$\forall x \in [1, e]$: $0 \leq \ln x \leq 1$

donc $(\ln x)^n \geq 0$

et $1 - \ln x \geq 0$

or $\ln x^n - \ln x^{n+1} = \ln x^n (1 - \ln x) \geq 0$ (0,5)

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n \, dx \leq 0$

$\rightarrow \boxed{(I_n) \text{ est } \searrow}$ (0,5)

2) a) $I_1 = \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e$

$= (e - e) - (-1) = 1$ (0,5)

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

$= \int_1^e x \cdot \frac{(\ln x)^n}{x} dx$

$U = x \longrightarrow U' = 1$

$V' = \frac{(\ln x)^n}{x} \rightarrow \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$ (0,25)

$I_n = \left[x \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e \ln x^{n+1} dx$

$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$

$(n+1) I_n = e - I_{n+1}$

$\boxed{I_{n+1} = e - (n+1) I_n}$ (0,75)

c) $I_2 = e - 2 I_1 = \boxed{e - 2}$ (0,25)

$I_3 = e - 3 I_2 = e - 3(e-2)$

$= \boxed{6 - 2e}$ (0,5)

$I_4 = e - 4 I_3 = e - 4(6 - 2e)$ (0,5)

$= \cancel{24} \ldots \boxed{9e - 2\ldots}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: I_n et $\forall x \in [1, e]$; $(\ln x)^n \geq \ldots$

$\rightarrow I_n \geq 0$

donc $I_{n+1} = e - (n+1) I_n \geq 0$

d'ou $I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$ (0,5)

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

d'après th L ordre $\boxed{\lim_{+\infty} I_n = 0}$

donc (I_n) est convergente. (0,5)

4) $I_{n+1} = e - (n+1) I_n = e - n I_n - I_n$

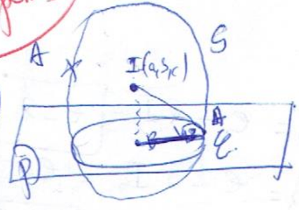
$\Leftrightarrow \cancel{n I_n} \; I_{n+1} = e - n I_n - I_n$

$\Leftrightarrow \boxed{n I_n + (I_{n+1} + I_n) = e}$ (0,5)

$\lim_{+\infty} I_n = \lim_{+\infty} I_{n+1}$ donc

$\boxed{\lim_{+\infty} n I_n = e}$ (0,5)

EX 4 : 5,5 points



$A(1,-1,4)$; $B(-1,0,2)$

(A) $P : x+y-z+3=0$

(1) • $1-1-4+z = -1 \neq 0$ donc $A \notin P$ (0,5)

• $-1+0-2+3=0$ donc $B \in P$

$\cancel{IA^2 - IB^2} =$

(2) (a) $P \cap S(I,R) = \mathcal{C}(B, \sqrt{13})$

$\Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{R^2 - d(I,P)^2} = \sqrt{IA^2 - IB^2}$

d'où $\boxed{IA^2 - IB^2 = 13}$ (0,5)

(b) $IA^2 - IB^2 = 13$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 - \left((a+1)^2 + b^2 + (c-2)^2\right) = 13$

$\cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{b^2} + 2b + 1 + \cancel{c^2} - 8c + 16$

$-\cancel{a^2} - 2a - 1 - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 4c - 4 = 13$

$\Leftrightarrow -4a + 2b - 4c = 0$

$\boxed{2a - b + 2c = 0}$ (0,5)

3) a) $\Delta(B, \vec{n}) : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 0 + \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ (0,5)

b) $I \in \Delta$; donc $\begin{cases} a = -1+\alpha \\ b = \alpha \\ c = 2-\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

or $2a - b + 2c = 0$ d'où

$2(-1+\alpha) - \alpha + 2(2-\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow -2 + \cancel{2\alpha} - \alpha + 4 - \cancel{2\alpha} = 0$

$2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$

d'où $\boxed{I(1, 2, 0)}$ (0,5)

4) $IA^2 = 13 + IB^2$

$\vec{IB}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $IB^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2 = 12$

$IB^2 = 12$

$\rightarrow IA^2 = 13 + 12 = 25 \rightarrow IA = R = 5$

d'où $\boxed{S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25}$ (0,5)

(B) $S_m : x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 4my + 5(m^2 - 5) = 0$

(1) $x^2 - 2mx + y^2 - 4my + z^2 + 5m^2 - 25 = 0$

$(x-m)^2 - \cancel{m^2} + (y-2m)^2 - \cancel{4m^2} + z^2 + \cancel{5m^2} - 25 = 0$

$S_m : (x-m)^2 + (y-2m)^2 + z^2 = 25$ (0,5)

(S_m) sphère de centre $I_m(m, 2m, 0)$ et de rayon $R=5$

(2) $A \in S_m$ ssi $1 + 1 + 16 - 2m + 4m + 5m^2 - 25 = 0$

$5m^2 + 2m - 7 = 0$

$\boxed{\text{donc } m = 1 \text{ ou } m = -\frac{7}{5}}$ (0,5)

(3) $I_m(x,y,z) \begin{cases} x = m \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points I_m est la droite passant par O et du vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (0,5)

(4) $d_m = d(I_m, P) = \dfrac{|m + 2m + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,|m+1|$

$R^2 - d(I_m,P)^2 = 25 - 3(m+1)^2 = -3m^2 - 6m + 22 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \times (-3) \times 22 = 300 = (10\sqrt{3})^2$

$m' = \dfrac{6 + 10\sqrt{3}}{-6}$; $m'' = \dfrac{6 - 10\sqrt{3}}{-6}$

$= -1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}$; $m'' = -1 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$

m	$-\infty$	m'		m''	$+\infty$
$R^2 - d_m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
position S_m et P	disjoints	Tg	sécants	Tg	disjoints

(0,5)

(5) ssi $I_m \in P$.

$d(I_m, P) = 0 \Leftrightarrow$

$m + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{m = -1}$ (0,5)

donc $I_{n+1} = e - (n+1)I_n \geq 0$

d'où $I_n \leq \frac{e}{n+1}$ 0,5

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} 0 = 0$ 0,5

d'après th. L.o.du $\boxed{\lim\limits_{+\infty} I_n = 0}$

donc (I_n) est convergente

4) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n = e - nI_n - I_n$

$\iff I_{n+1} = e - nI_n - I_n$

$\boxed{nI_n + (I_{n+1} + I_n) = e}$ 0,5

$\lim\limits_{+\infty} I_n = 0 = \lim\limits_{+\infty} I_{n+1}$ donc

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} nI_n = e}$ 0,5

EX4 :

(A) (1) $P : x + y - z + 3 = 0$

• $1 - 1 - 4 + 3 = -1 \neq 0$ donc $A \notin P$

• $-1 + 0 - 2 + 3 = 0$ donc $B \in P$ 0,5

(2) (a) $P \cap S(I,R) = \mathcal{C}(B, \sqrt{13})$

$\iff \sqrt{13} = \sqrt{R^2 - d^2(I,P)} = \sqrt{IA^2 - IB^2}$

d'où $\boxed{IA^2 - IB^2 = 13}$ 0,5

(b) $IA^2 - IB^2 = 13$

$\iff (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 - \left((a+1)^2 + b^2 + (c-2)^2\right) = 13$

$\iff \boxed{2a - b + 2c = 0}$ 0,5

3) a) $\Delta(B, \vec{n}) : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 0 + \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ 0,5

b) $I \in \Delta$ donc $\begin{cases} a = -1 + \alpha \\ b = \alpha \\ c = 2 - \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$

or $2a - b + 2c = 0$ d'où

$2(-1+\alpha) - \alpha + 2(2-\alpha) = 0 \iff \alpha = 2$

donc $\boxed{I(1,2,0)}$ 0,5

4) $IA^2 = 13 + IB^2$; $\vec{IB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$; $IB^2 = 12$

$\to IA^2 = 13 + 12 = 25 \to IA = R = 5$

d'où $\boxed{S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25}$ 0,5

(B)

1) $S_m : (x-m)^2 + (y-2m)^2 + z^2 = 25$ 0,5

(S_m) : sphère de centre $I_m(m, 2m, 0)$ et de rayon $R = 5$

(2) $A \in S_m$ ssi $1 + 1 + 16 - 2m + 4m + 5m^2 - 25 = 0$

$\iff 5m^2 + 2m - 7 = 0$

$\iff \boxed{m = 1 \text{ ou } m = -\frac{7}{5}}$ 0,5

(3) $I_m(x,y,z) : \begin{cases} x = m \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} m \in \mathbb{R}$; dte passant par O et de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 0,5

(4) $d(I_m, P) = \frac{|m + 2m + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}|m+1|$

$R^2 - d^2(I_m, P) = 25 - 3(m+1)^2 = -3m^2 - 6m + 22 = 0$

$\Delta = 300 = (10\sqrt{3})^2$

$m' = \frac{6 + 10\sqrt{3}}{-6}$; $m'' = \frac{6 - 10\sqrt{3}}{-6}$

m	$-\infty$	m'		m''	$+\infty$
$R^2 - d_m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
position de S_m et P	disjoints	tangents	sécants	tangents	disjoints

0,5

(5) ssi $I_m \in P$

$d(I_m, P) = 0$

$m + 1 = 0 \iff$

$\boxed{m = -1}$ 0,5