L.S.H.B.Dahmani | **Devoir de Synthèse n°2** | $3^{ème}$ technique$_2$

Mr : W-Adel | le 14-03-2025

Exercice n°1 :($5points = 1 + 0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1$)

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - cos2x + 2cosx$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f paire et périodique de période 2π.

b) Déduire qu'on peut étudier f sur $[0, \pi]$.

c) Montrer que pour tout$x \in [0, \pi]on\ a\ :\ f'(x) = 2sinx(2cosx - 1)$.

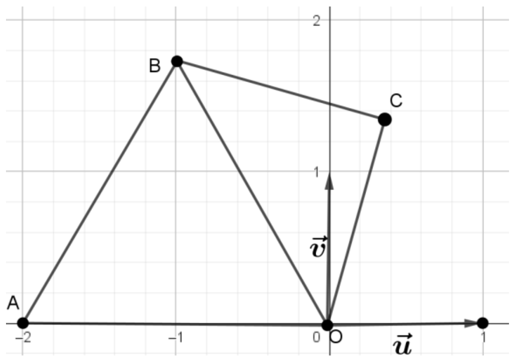
d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

2) Tracer la courbe de la restriction de f sur $[0, \pi]$ puis sur $[-2\pi, 3\pi]$ dans la feuille annexe

3) Soit g la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-2}{sinx} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité puis la dérivabilité de g en 0 .

Exercice n°2 :($5points = 1.5 + 1.5 + 1 + 1$)



1) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure ci-dessous :

- A est le point d'affixe $z_A = -2$.
- OBA est un triangle équilatéral .
- OCB est un triangle rectangle et isocèle en C .

a) Déterminer par une lecture graphique et en justifiant la réponse, la forme trigonométrique de z_B .

b) En déduire que $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

2) a) Vérifier que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire que $z_C = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12})$.

3) a) Donner la forme trigonométrique de $1 + i$.

b) Vérifier que $z_B = (1 + i)z_C$.

c) En déduire que $z_C = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$.

d) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice n°3 :$(7points) = 1.5 + 1 + 1.5 + 0.5 + 1 + 1.5)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ par $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, on ait :

$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet trois asymptotes que l'on précisera .

2) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point Id'abscisse 0 .

b) Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à T.

c) tracer la tangente T et $(\mathscr{C})$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ par $g(x) = \frac{3x^2+4|x|-3}{x^2-1}$

Tracer avec autre couleur dans le même repère la courbe $(\mathscr{C}g)$.

Exercice n°4 :$(3points)$

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On donne le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

On sait de plus que :

- La droite $D: y = -x - 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
- La droite $T: y = x - 4$ est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 4 .
- $f(-2) = f(1) = f(6) = 1$.

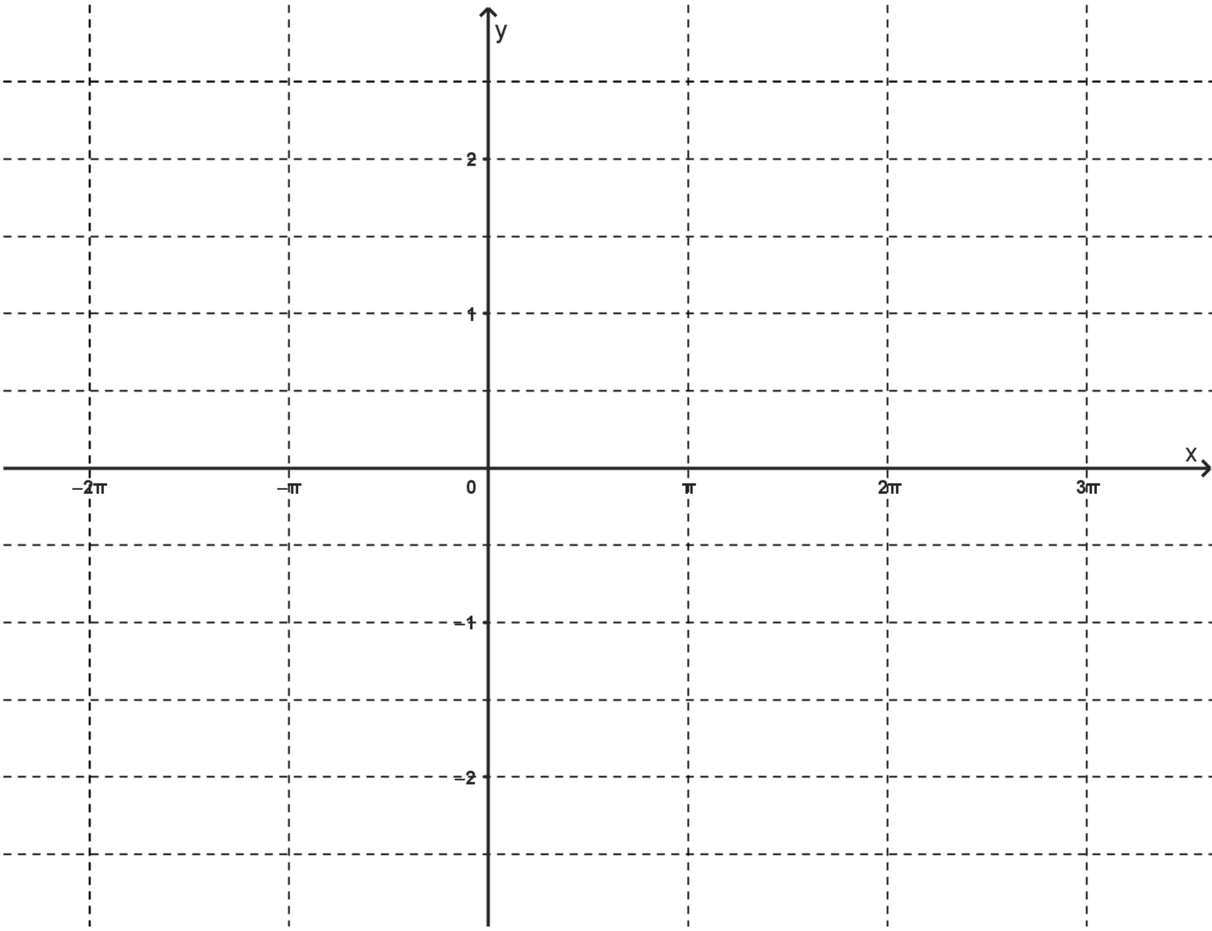
Tracer sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et les tous les éléments de l'hypothèse .

Bon travail

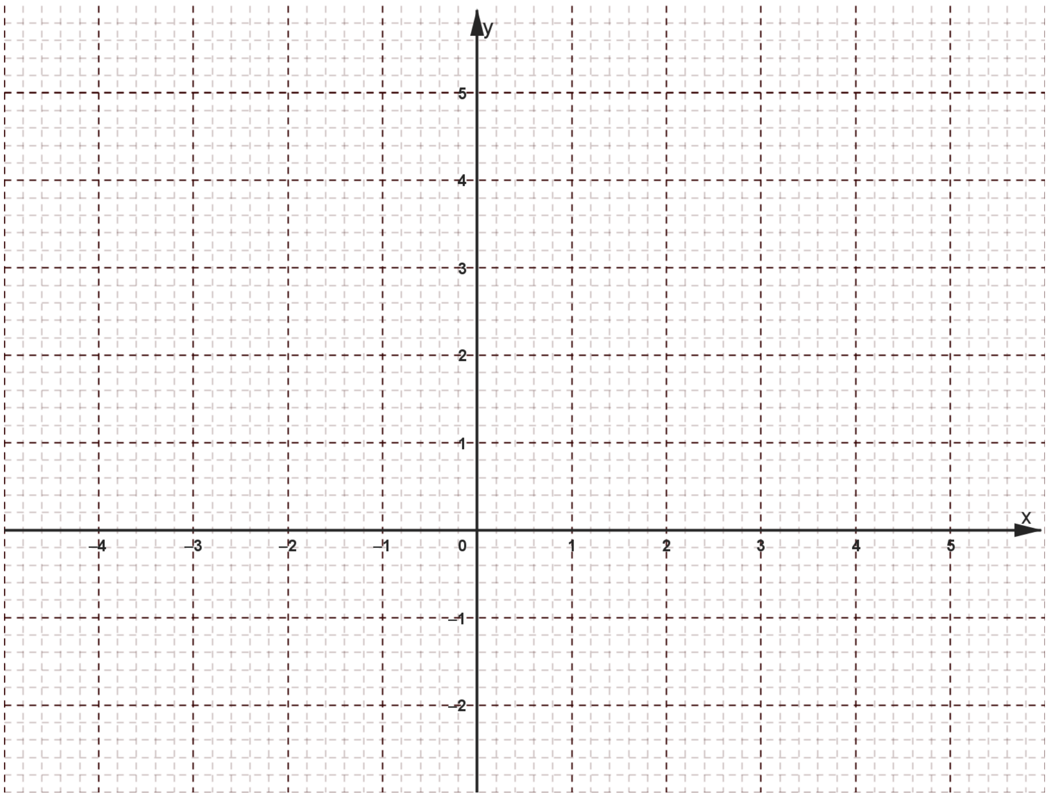
Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : **Prénom :** **n° :** **Classe :**

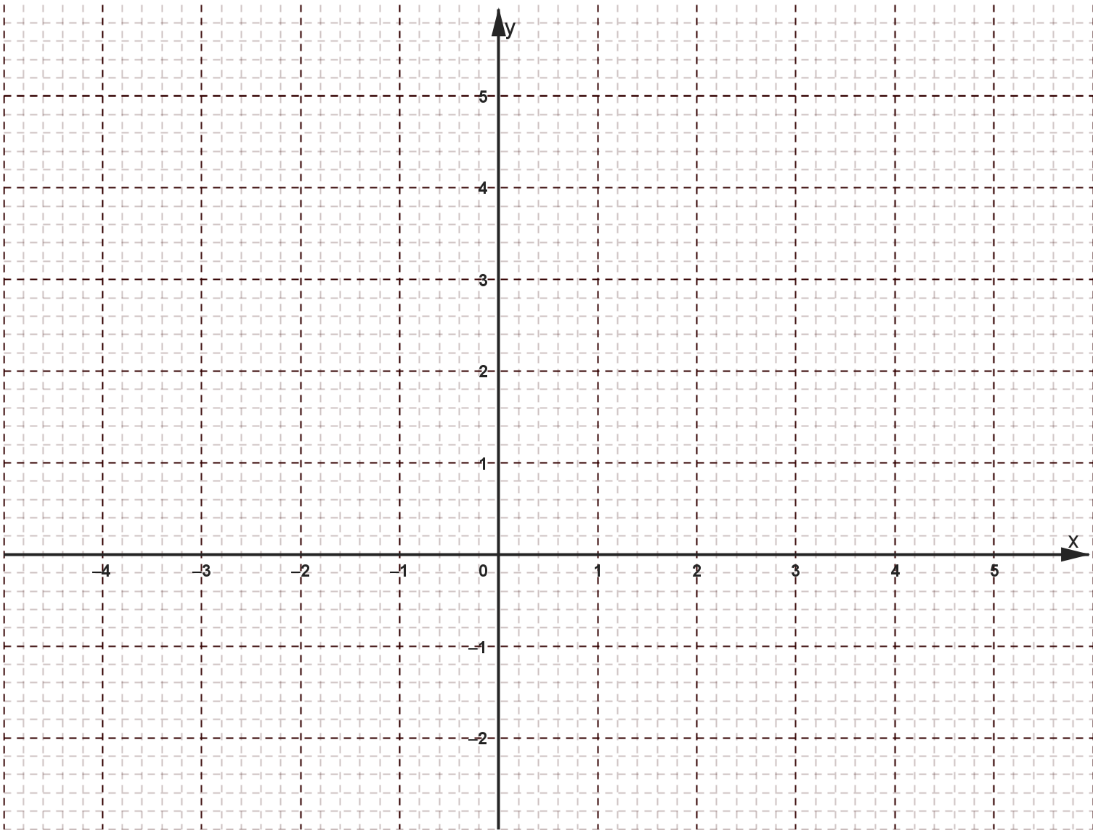
Exercice n°1 :



Exercice n°3 :



Exercice n°4:



Correction du DS$_2$:

Exercice 1 : 5 points

$$f(x) = 1 - \cos 2x + 2\cos x$$

1) a) • $f(-x) = 1 - \cos(2(-x)) + 2\cos(-x)$

$= 1 - \cos 2x + 2\cos x = f(x)$

$\longrightarrow$ f paire 0,5

• $f(x+2\pi) = 1 + \cos\left(2(x+2\pi)\right) + 2\cos(x+2\pi)$

$= 1 + \cos 2x + 2\cos x = f(x)$ 0,5

$\longrightarrow$ f périodique de période 2π

1) b) f périodique de période 2π, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi, \pi]$. Comme f est paire il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$

$D_E = [0, \pi]$ 0,5

1) c) $f'(x) = 2\sin 2x - 2\sin x$.

$= 4 \sin x \cos x - 2\sin x$

$$\boxed{f'(x) = 2\sin x\,(2\cos x - 1)}$$ 0,5

1) d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-2

$f(0) = 1 - 1 + 2 = 2$ 1

$f(\pi) = 1 - \cos 2\pi + 2\cos\pi$

$= 1 - 1 + 2\pi$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{5}{2}$.

2) voir figure

3) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 2}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x + 2\cos x - 2}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1 - \cos 2x + 2\cos x}{\sin x}$ 0,5

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\cos^2 x + 2\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{0} \dfrac{2\cos x \frac{(1 - \cos x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1}$

$= 0 = g(0)$

$\longrightarrow$ g continue en 0 0,5

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0} \dfrac{2\cos x \frac{(1 - \cos x)}{x^2}}{\frac{x \cdot \sin x}{x^2}} = \dfrac{2 \times \frac{1}{2}}{1}$

$= 1 \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ g dérivable en 0

Ex2 : 5 points

1) $|z_B| = 2$.

a) $\arg z_B \equiv (\vec{u}, \vec{OB})$
$\equiv \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

$$\boxed{z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$ 1

1)b) $z_B = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3}$ 0,5
$= 2 \times \frac{1}{-2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1 + i\sqrt{3}}$

2)a) $(\vec{u}, \vec{OC}) \equiv (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{OB}, \vec{OC}) [2\pi]$
$\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$
$\equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

2)b) $OC^2 + OB^2 = 2^2 = 4$
$2OC^2 = 4 \Leftrightarrow OC^2 = 2 \Leftrightarrow OC = \sqrt{2}$

d'où $$\boxed{z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}$$ 1

3)a) $$\boxed{1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$ 0,5

3)b) ~~$(1+i) z_B = (1+i)(1+i\sqrt{3})$~~
~~$= -1 + i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}$~~
~~$z_C = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)$~~

$(1+i) z_C = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] \cdot [\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12}]$
$= [2, \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}]$ 0,5
$= [2, \frac{8\pi}{12}] = [2, \frac{2\pi}{3}]$
$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = z_B$

3)c) ~~$z_C = \frac{z_B}{1+i} = \frac{[2, \frac{2\pi}{3}]}{[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]} = [\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}]$~~
~~$= [\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12}]$~~

$z_C = \frac{z_B}{1+i} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$= \frac{-1+i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$ 0,5

$$\boxed{z_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}}$$

3)d) $z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

$$\text{;}\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & 0,5 \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}. & 0,5 \end{cases}$$

Ex3 : 4 points

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$$

1)a) $a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(x^2-1)+b(x+1)+c(x-1)}{x^2-1}$

$= \frac{ax^2+(b+c)x-a+b-c}{x^2-1}$

par identification

$\begin{cases} a=3 \\ b+c=4 \\ -a+b-c=-3 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=3 \\ c=4-b \\ \cancel{-3}+b-4+b=\cancel{-3} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a=3 \\ c=4-b \\ 2b=4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$ 1,5

d'où $\boxed{f(x) = 3 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}}$

1)b) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} < 0$ 0,25

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	‖ $-$	
f	$3 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 3$	

1

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = \lim_{-\infty} 3 = 3$

$\lim_{1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{(-1)^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{(-1)^-} f(x) = -\infty$

1)c) $x=-1$ asymptote à $\mathcal{C}_f$ 1,5

$x = 1$ asy " " $\mathcal{C}_f$

$y = 3$ asy à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

2)a) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{y = -4x+3}$ 0,5

2)b) $f(x) - y = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} + 4x - 3$

$= \frac{3x^2+4x-3+(4x-3)(x^2-1)}{x^2-1}$

$= \frac{\cancel{3x^2}+\cancel{4x}-\cancel{3}+4x^3-\cancel{4x}-\cancel{3x^2}+\cancel{3}}{x^2-1}$

$= \frac{4x^3}{x^2-1}$ 1

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$4x^3$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
x^2-1	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
$f(x)-y$	$-$	‖ $+$	0 $-$	‖ $+$	
position	T/$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_f$/T	T/$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_f$/T	

2)c) voir figure

3) voir figure.

2^{e} méthode : la dérivée

$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2-1) - 2x(3x^2+4x-3)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{\cancel{6x^3}-\cancel{6x}+4x^2-4-\cancel{6x^3}-8x^2+\cancel{6x}}{(x^2-1)^2}$

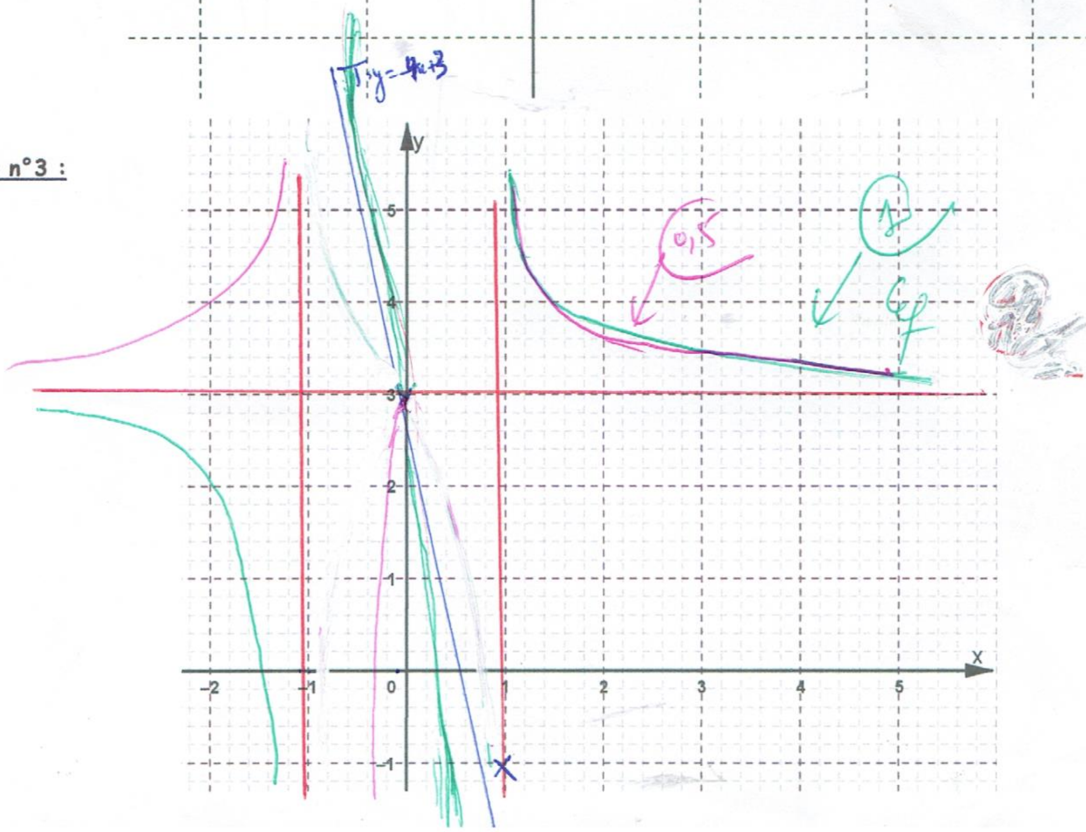
$= \frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2} = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$

Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : Prénom : n° : Classe :

Exercice n°1 :

Exercice n°3 :



Exercice n°4: 3points