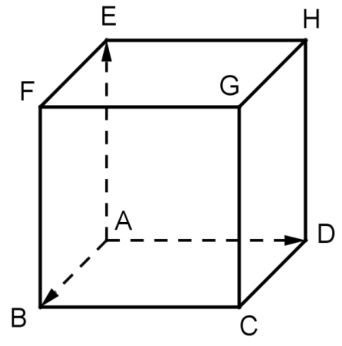
L.S.H.B.Dahmani **Devoir de synthèse n°2** 4 technique$_2$

M^r : W-Adel le 15-03-2025

Exercice n°1 :($3points = 3 \times 1$)

- Pour chacune des réponses suivantes une seule des quatre réponses proposées est exacte .Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée.
- Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Le vecteur $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}$ est égale à ;

a) $\overrightarrow{CG}$; b) $\overrightarrow{GC}$; c) $\overrightarrow{CE}$

2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ $etz = 1$ est la droite

a) (FG) ; b) (BC) ; c) (EH)

3) L'intersection de la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ avec le plan (FGH) est :

a) Le cercle de centre G ; b) l'ensemble vide ; c) le cercle de centre E

Exercice n°2 :($5points = 1 + 2 + 1.25 + 0.75$)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points

A(6,0,0) ; B(0,6,0) ; C(0,0,6) et D(-2,-2,-2).

1) **a**) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P .

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est $x + y + z - 6 = 0$.

2) **a)** Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P .

b) Donner une équation paramétrique de la droite (OD) .

c) Soit H le projeté orthogonale de O sur P .

Déterminer les coordonnées de H et Calculer AH , BH et CH. .

d) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC .

3) Soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 24 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

b) Vérifier que S passe par A, B, C et D .

c) Quelle est l'intersection de S et P.

4) Soit Q le plan médiateur du segment $[CD]$.

a) Donner une équation cartésienne de Q.

b) Montrer que la droite (OD) coupe Q en un point Ω.

Exercice n°3 :$(7points = 0.5 + 0.25 + 1 + 0.5 + 0.75 + 0.75 + 1 + 1 + 1.25)$

A) on considère la fonction **h** définie sur $]0, e]$ par $h(x) = 1 - x\sqrt{1 - lnx}$ dont son tableau de variation est le suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		e
$h(x)$	a	↘	$(1 - \sqrt{\frac{e}{2}})$	↗	1

1) Calculer $h(1)$ et on déduire que : $a > 0$.

2) Déterminer la valeur de **a** .

3) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]\sqrt{e}, e]$ une unique solution α puis vérifier que : $2.2 < \alpha < 2.3$.

4) Donner le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-lnx}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) **a**) Déterminer I le domaine de définition de f.

b)Vérifier que $f(x) > 0, pour\ tout\ x \in I$.

2) **a**) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

b)Calculer $\lim_{x \to e^-} f(x)$, et interpréter graphiquement le résultat .

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) **a**) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f coupe la droite $\Delta: y = x$ en deux points dont on donnera les coordonnées .

b) Vérifier que $f(x) - x = h(x). f(x)$.

c) Etudier alors , la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

5) **a)** Déterminer une équation cartésienne de la tangente **T** à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1

b) Tracer Δ , T et $\mathscr{C}$ **<u>dans la feuille annexe</u>** .

Exercice n°4 :($\mathbf{5}\boldsymbol{points} = \mathbf{1.25 + 1.75 + 1.25 + 0.75}$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

c) Montrer que la droite $\Delta: y = x - 2$ est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2e^{-x} + 1 \geq 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont l'une est nulle .On notera α l'autre solution et on vérifiera que $1.5 < \alpha < 1.6$.

3) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O .

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x} + 2x - 2$

Etudier le sens de variation de g et déduire le signe de $g(x)$.

c) En déduire la position de la courbe de ($\mathscr{C}$) par rapport à T.

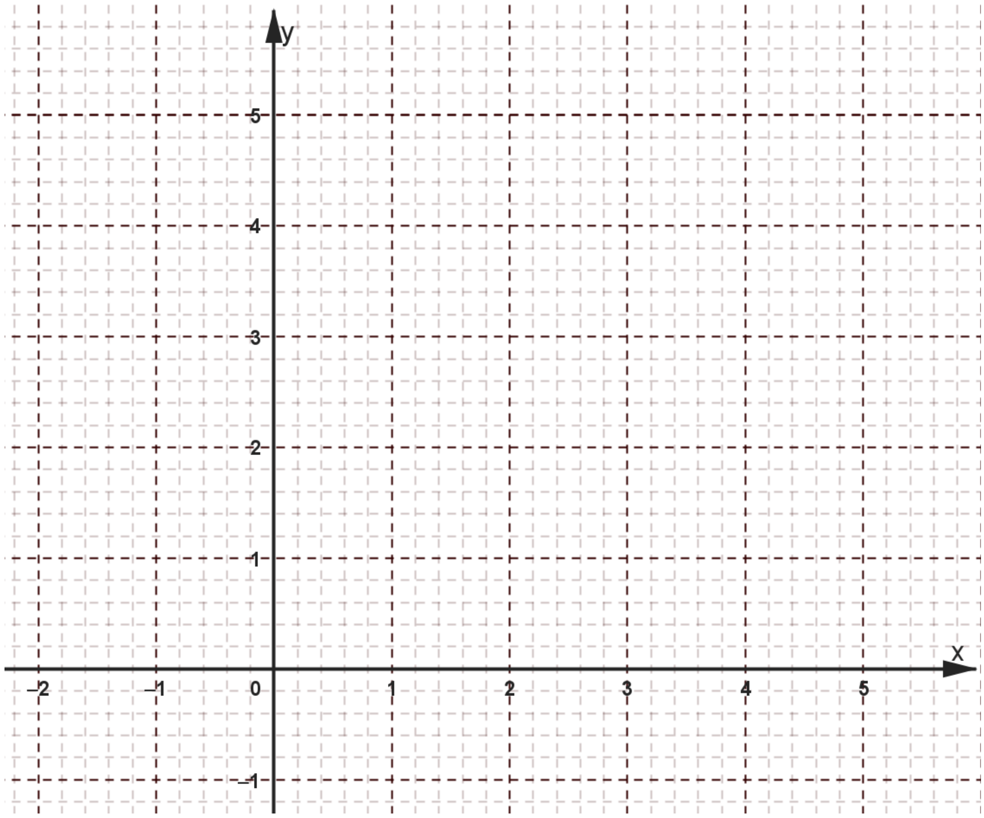
4) Tracer Δ , T et ($\mathscr{C}$) dans la **feuille annexe**.

Bon travail

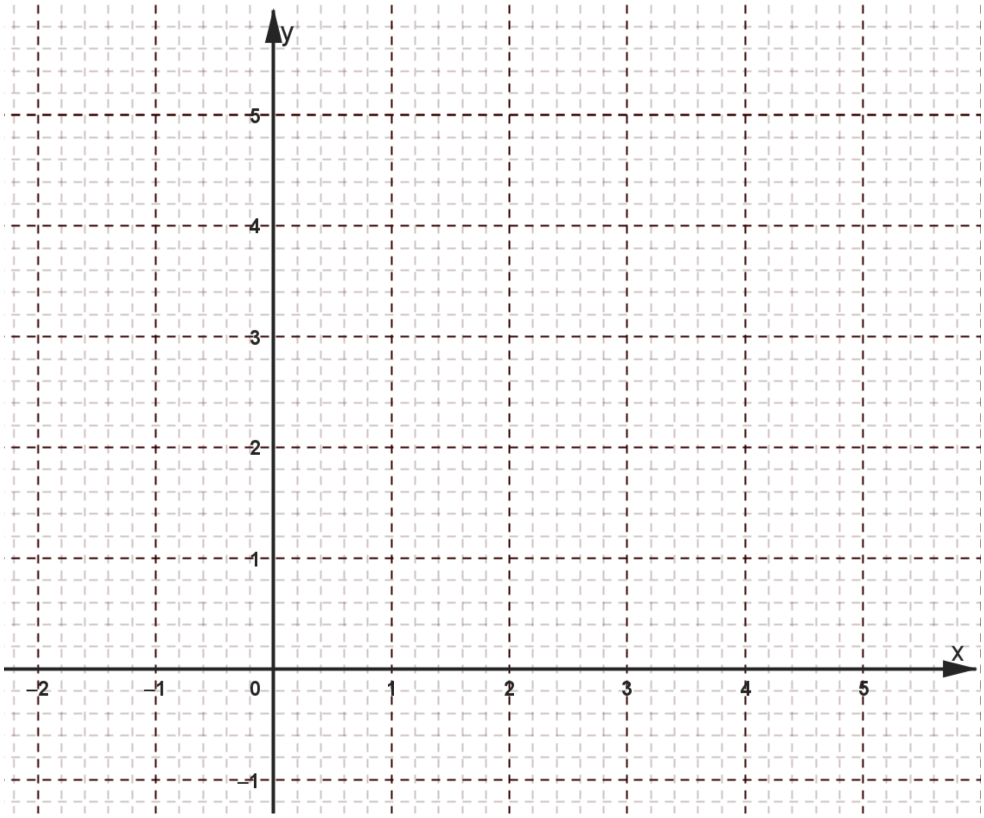
Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : **Prénom :** **n° :** **Classe :**

Exercice n°3 :



Exercice n°4:



CDS2 (1)

Exercice 1 : b) ; a) ; c) 3pts

Exercice n°2 : 7points

$A(6,0,0)$; $B(0,6,0)$; $C(0,0,6)$; $D(-2,-2,-2)$

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ 0,5

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}36\\36\\36\end{pmatrix}$

1)b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés donc A, B et C définissent un plan. 0,25

1)c) $\vec{n} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}36\\36\\36\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

vecteur normal au plan P d'où

$P : x+y+z+d=0$

$A \in (6,0,0) \in P \Leftrightarrow 6+0+0+d=0 \Leftrightarrow d=-6$ 0,25

d'où $\boxed{P : x+y+z-6=0}$

2)a) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\vec{n}$.

$\overrightarrow{OD}$ et $\vec{n}$ colinéaires donc

$\boxed{(OD)\perp P} \to$ 0,25

2)b) $\boxed{(OD) = D(O,\vec{n}) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \alpha\in\mathbb{R}}$ 0,25

2)c) $H(x,y,z) = ?$

$H \in P \Leftrightarrow \alpha+\alpha+\alpha-6=0$

$3\alpha-6=0$

$\alpha=2$

d'où $\boxed{H(2,2,2)}$ 0,5

2)d) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$

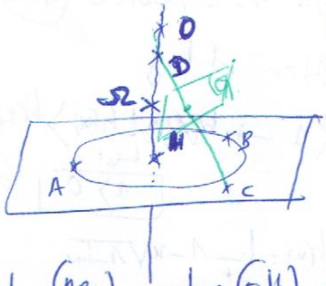
$AH = \sqrt{(-4)^2+2^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 0,5

$BH = 2\sqrt{6}$

$CH = 2\sqrt{6}$

on a

$AH = BH = CH$ donc H est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



Comme $(OD)\perp(ABC)$ alors (OH) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC. 0,5

3)a) $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1-24=0$ 0,5

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 27 = \sqrt{27}^2 = \sqrt{9\times3}^2 = (3\sqrt{3})^2$.

S sphère de centre $\Omega(1,1,1)$ et de rayon $R=\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

3)b) $A\in S$ car $6^2+0+0-2\times6-2\times0-2\times0-24 = 36-12-24=0$ donc $A\in S$ 0,5

de même $B, C, D \in S$

3)c) Comme $A,B,C \in S$ et $A,B,C\in P$.

$\to \boxed{S\cap P = \mathcal{C}(H, AH)}$ 0,25

4)a) Soit Q le plan médiateur de $[OD]$ avec $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix}$

d'où $Q : -2x-2y-8z+d=0$

Donc $(-1,-1,2)\in Q \Leftrightarrow 2+2-16+d=0 \Leftrightarrow 4-16+d=0$

$d=12$

d'où $Q : -2x-2y-8z+12=0$

$\boxed{Q : x+y+4z-6=0}$ 0,5

4)b) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix}$; $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ 0,25

$\overrightarrow{OD}\cdot\vec{n}_Q = -2-2-8 = -12 \neq 0 \to \boxed{(OD) \text{ et } Q \text{ sécants}}$

Comme $\Omega\in Q$ et $(OD) \to \boxed{Q\cap(OD) = \{\Omega\}}$

(2)

Exercice n°3: $h(x) = 1 - x\sqrt{1-\ln x}$.

(A)

x	0		1		$\sqrt{e}$		α		e
h	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

1) $h(1) = 1 - 1\sqrt{1-\ln 1} = 0$ (0,25)

$h(1)=0$ et $h \searrow$

$0 < 1 \to \lim\limits_{0^+} h(x) > h(1) = 0$

$\boxed{a > 0}$ (0,25)

2) $\lim\limits_{0^+} h(x) = \lim\limits_{0^+} 1 - x\sqrt{1-\ln x}$

$= \lim\limits_{0^+} 1 - \sqrt{x^2 - x^2\ln x} = 1$

$\longrightarrow \boxed{a = 1}$ (0,25)

3) h continue; strict $\nearrow$ sur $[\sqrt{e}, e] \to h$ bijective de $]\sqrt{e}, e]$ sur $]1-\sqrt{\frac{e}{2}}, 1]$

$0 \in]1-\sqrt{\frac{e}{2}}, 1] \to 0$ admet un unique antécédent $\alpha \in]\sqrt{e}, e[\,/\, h(\alpha) = 0$.

$h(2,2) = 1 - 2,2\sqrt{1-\ln 2,2} = -0,011$

$h(2,3) = 1 - 2,3\sqrt{1-\ln 2,3} = 0,059$.

$h(2,2)\cdot h(2,3) < 0 \xrightarrow{\text{TVI}} \boxed{2,3 < \alpha < 2,3}$ (0,5) (0,5)

4)

x		1		α		e
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(0,5)

(B) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$

1)a) f définie ssi $1 - \ln x > 0$ et $x > 0$

$\ln x < 1$

$x < e$ et $x > 0$ donc

$0 < x < e$

$\boxed{I =]0, e[}$ (0,5)

1)b) $0 < x < e \Rightarrow x < e$

$\ln x < 1$

$1 - \ln x > 0$

$\sqrt{1-\ln x} > 0 \iff \boxed{f(x) > 0} \ \forall x \in I$ (0,25)

2)a) $\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ (0,25)

2)b) $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{e^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ (0,25)

$\longrightarrow \boxed{x = e \text{ asy à } \mathscr{C}_f}$ (0,25)

3) $f'(x) = \dfrac{-\left(\sqrt{1-\ln x}\right)'}{\left(\sqrt{1-\ln x}\right)^2} = \dfrac{-\dfrac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}}}{1-\ln x}$

$= \dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}\cdot(1-\ln x)} > 0$ (0,5 = 0,25×2)

x	0		e
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)a) $f(x) = x \iff \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}} = x \iff 1 = x\sqrt{1-\ln x}$

$\iff h(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = \alpha$.

$\mathscr{C}_f \cap \Delta = \{A(1,1); B(\alpha,\alpha)\}$.

4)b) $h(x)\cdot f(x) = \left(1 - x\sqrt{1-\ln x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}} - x = f(x) - x$. (0,5)

4)c) $f(x) - x = h(x)\cdot f(x)$

x	0		1		α		e
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
position		$\mathscr{C}_f/\Delta$		$\Delta/\mathscr{C}_f$		$\mathscr{C}_f/\Delta$	

(0,5)

5)a) $T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (0,25)

5)b) voir figure.

③

Exercice n°4 (5 points)

$f(x) = 2e^{-x} + x - 2$

1) a) • $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{2}{e^x} + x - 2 = \boxed{+\infty}$ (0,25)

• $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} 2e^{-x} + x - 2 = \lim_{-\infty} x\left(\frac{2e^{-x}}{x} + 1 - \frac{2}{x}\right)$

$= \lim_{-\infty} x\left(\frac{2}{xe^{x}} + 1 - \frac{2}{x}\right)$ (0,25)

$= -\infty \times -\infty = \boxed{+\infty}$

1) b) $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{2e^{-x} + x - 2}{x}$

$= \lim_{-\infty} \frac{2}{xe^{x}} + 1 - \frac{2}{x} = -\infty$ (0,25)

$\longrightarrow \mathcal{C}_f$ admet une B.P de direction $(o,\vec{j})$ au $V(-\infty)$ (0,25)

1) c) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{+\infty} 2e^{-x} = \lim_{+\infty} \frac{2}{e^x} \boxed{= 0}$

$\longrightarrow \boxed{y = x - 2 \text{ asy à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty}$ (0,25)

2) a) $-2e^{-x} + 1 \geq 0$ ssi $-2e^{-x} \leq -1$

ssi $e^{-x} \geq \frac{1}{2}$ ssi $-x \leq \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$\longrightarrow x \geq \ln 2$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = [\ln 2, +\infty[}$ (0,25)

2) b) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2e^{-x} + 1$

$f'(x) = 0$ ssi $x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln 2 - 1$	↗	$+\infty$

(0,25)

d'aps 2) a) $f(x) \geq 0$ pour $x \in [\ln 2, +\infty[$

$f(\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2$

$= 2e^{\ln\frac{1}{2}} + \ln 2 - 2$

$= 1 + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1$

2) c) f continue, str ↘ sur $]-\infty, \ln 2]$

$\longrightarrow f$ bijective de $]-\infty, \ln 2]$ vers $[\ln 2 - 1, +\infty[$ (0,5)

$0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[\longrightarrow 0$ admet unique $\alpha \in]-\infty, \ln 2]$

$f(\alpha) = 0$ Comme $f(0) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = 0}}$

• f conti, str ↗ sur $[\ln 2, +\infty[\longrightarrow f$ bijective de $[\ln 2, +\infty[$

sur $f([\ln 2, +\infty[) = [\ln 2 - 1, +\infty[$

$0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[\longrightarrow 0$ admet unique $\beta \in [\ln 2, +\infty[$

$f(\beta) = 0$ (0,5)

Comme $f(1,5) = -0,05 < 0$
$f(1,6) = 0,003 > 0$ $\longrightarrow \boxed{1,5 < \beta < 1,6}$

3) a) $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$= -(x - 0) + 0$

$\boxed{T : y = -x}$ (0,25)

3) b) $g(x) = 2e^{-x} + 2x - 2$

$g'(x) = -2e^{-x} + 2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

(0,25)

$-2e^{-x} + 2 \geq 0$ ssi $e^{-x} \leq 1$ ssi $-x \leq 0$

$x \geq 0$

$g(0) = 0$

g admet un minimum absolu en 0 qui vaut 0

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ (0,25)

3) c) $f(x) - (-x) = f(x) + x = 2e^{-x} + x - 2 + x = g(x) \geq 0$

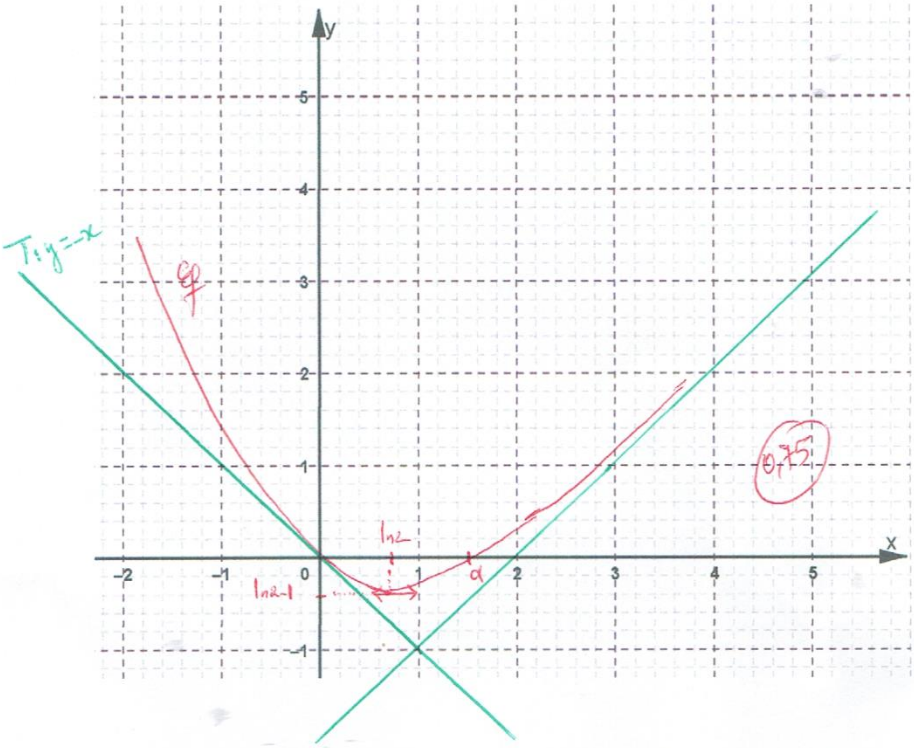
$\longrightarrow \boxed{\mathcal{C}_f / T}$ (0,25)

4

Annexe (à rendre avec la copie)

Nom : **Prénom :** **n° :** **Classe :**

Exercice n°3 :



Exercice n°4: