

Discipline : mathématiques .Correction de l'exercice n°4

(session de contrôle) bac sciences expérimentales

On considère la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x+2)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

I) 1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une direction asymptotique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x > -2$, $f'(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-2, +\infty[$ exactement deux solutions α et β telles que $\alpha < -1$ et $1.1 < \beta < 1.2$.

3. a) Etudier la position relative de (C_f) et Δ .

b) Tracer la courbe (C_f) .

4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite Δ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \beta$.

Montrer que $\mathcal{A} = \beta^2 + \beta - 1$.

II) Soit la suite (u_n) telle que
$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (2 + u_0) \times (2 + u_1) \times \dots \times (2 + u_n)$.

a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln(2 + u_k) = u_k - u_{k+1}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_n) = -u_{n+1}$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

$$f(x) = x - \ln(x+2) \quad ; \quad x \in]-2, +\infty[$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I/1/a/ on a } \lim_{x \rightarrow -2^+} x+2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+2) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x+2) = +\infty}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x - \ln(x+2) = +\infty$$

➔ la droite d'équation $(x = -2)$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$$\text{b/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(x+1)}{x+1} \\ \text{cf } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\underbrace{1}_{\downarrow 1} - \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\downarrow 0} = 1$$

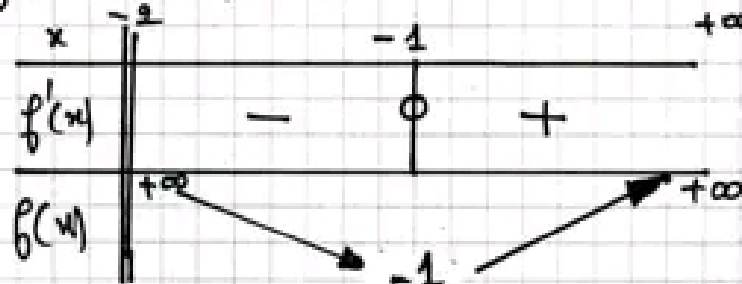
$$\begin{aligned} \text{c/ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x+2) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x+2) = -\infty \end{aligned}$$

➔ La droite $\Delta: y = x$ est une direction asymptotique à $\mathcal{C}_f$ au $V(+\infty)$.

Rq : On peut dire aussi que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie de direction celle de la droite $\Delta: y = x$ au $V(+\infty)$.

2/a/ Pour tout $x > -2$ on a $f(x) = x - \ln(x+2)$
 d'où $f'(x) = 1 - \frac{(x+2)'}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$

b/ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$



$f(-1) = -1 + \ln(-1+2) = -1$

c/. Pour $x \in]-2, -1[$ on a :

f continue et strictement décroissante

$f(]-2, -1[) =]-1, +\infty[$

or $0 \in]-1, +\infty[$

d'après th des valeurs
 intermédiaires on a :
 l'équation $f(x) = 0$
 admet une unique
 solution $\alpha < -1$

. Pour $x \in]-1, +\infty[$ on a :

f continue et strictement croissante

$f(]-1, +\infty[) =]-1, +\infty[$

$0 \in]-1, +\infty[$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet
 une unique solution :

β dans $]-1, +\infty[$, or

$f(1,1) = -0,031 \Rightarrow f(1,1) \times f(1,2) < 0$

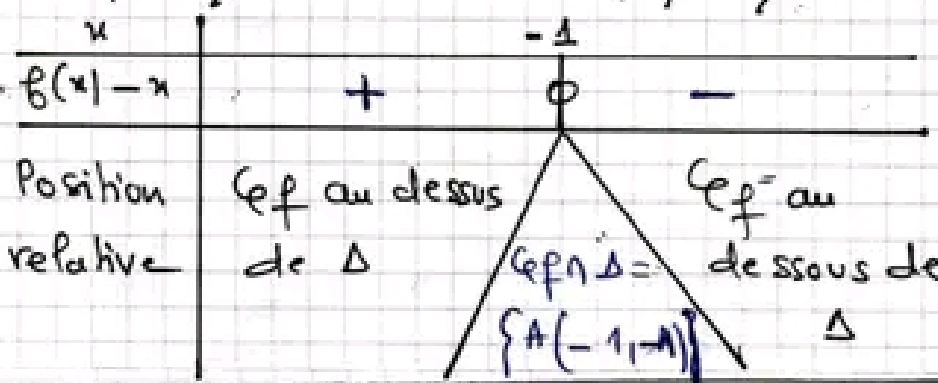
$f(1,2) = 0,036 \Rightarrow \underline{1,1 < \beta < 1,2}$

3/a/ $f(x) - x = -\ln(x+2) \Rightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+2) = \ln(1) \\ x > -2 \end{cases}$

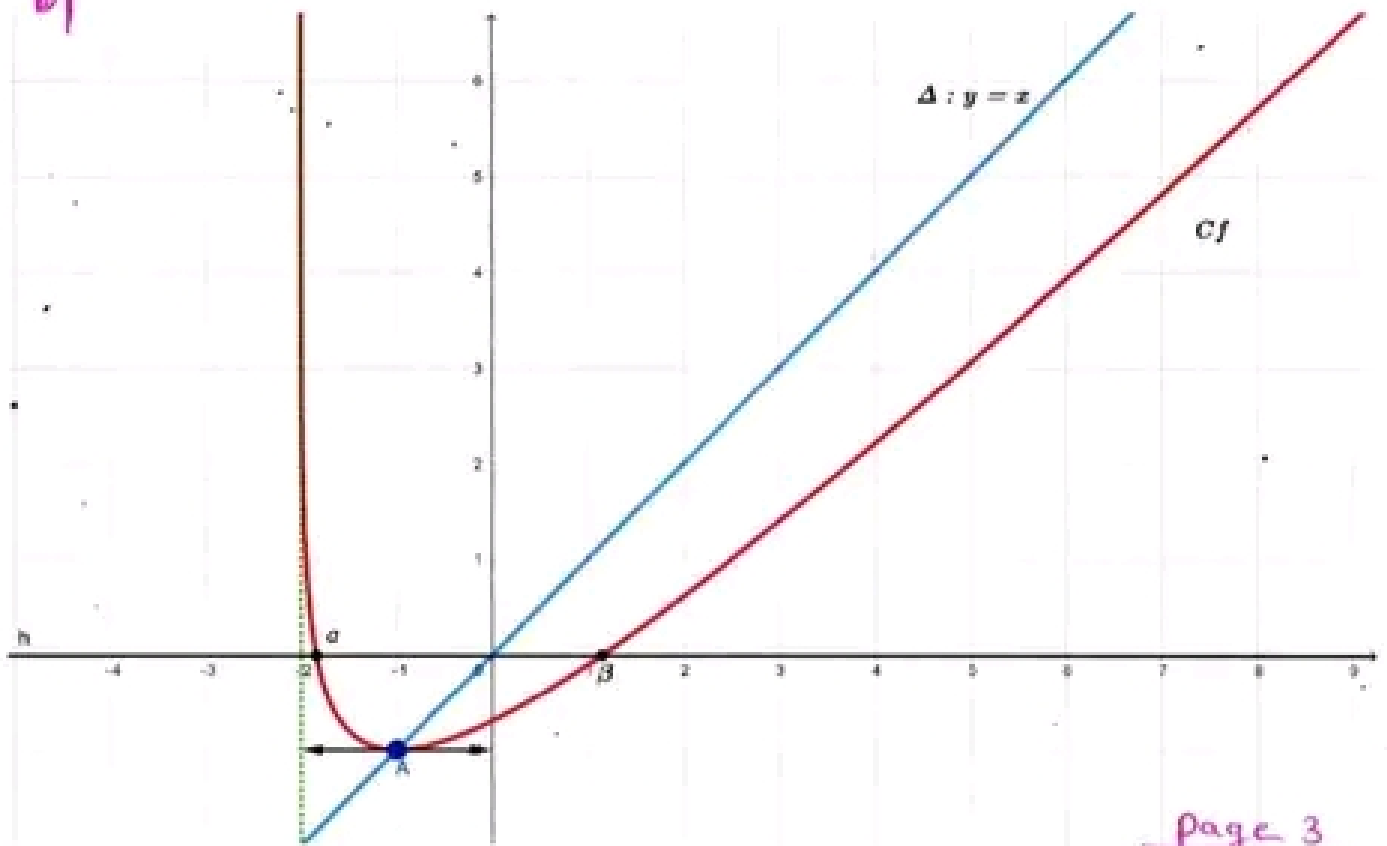
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ x > -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{et } -1 > -2 \end{cases}$



$x < -1$ sig
 $x+2 < 1$ sig
 $\ln(x+2) < 0$ sig
 $-\ln(x+2) > 0$

b/



page 3

page 1

$$\begin{aligned} \text{1/9/ } A &= \int_{-1}^{\beta} |x - f(x)| dx = \int_{-1}^{\beta} (x - f(x)) dx \quad \text{car } \forall x \in]-1, \beta[\text{ on a } x > f(x) \\ &= \int_{-1}^{\beta} (x - x + \ln(x+2)) dx \\ &= \int_{-1}^{\beta} 1 \cdot \ln(x+2) dx \end{aligned}$$

par intégration par parties
on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x+2) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+2} \\ v'(x) &= 1 \rightarrow v(x) = x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \left[x \ln(x+2) \right]_{-1}^{\beta} - \int_{-1}^{\beta} \frac{x}{x+2} dx$$

$$\text{or } \left[x \ln(x+2) \right]_{-1}^{\beta} = \beta \ln(\beta+2) - (-1) \ln(-1+2) = \beta \ln(\beta+2)$$

D'autre part :

$$\int_{-1}^{\beta} \frac{x}{x+2} dx = \int_{-1}^{\beta} \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int_{-1}^{\beta} \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[x - 2 \ln(x+2) \right]_{-1}^{\beta} = \beta - 2 \ln(\beta+2) - \left(-1 - 2 \ln(-1+2) \right) \\ &= \beta - 2 \ln(\beta+2) + 1 \end{aligned}$$

Finalement on aura :

$$A = \beta \ln(\beta+2) - (\beta - 2 \ln(\beta+2) + 1)$$

$$= \beta \ln(\beta+2) - \beta + 2 \ln(\beta+2) - 1$$

or β est une solution de l'éq $f(x) = 0$

$$\text{Sig } f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta - \ln(\beta+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln(\beta+2) = \beta}$$

$$\text{Donc } A = \beta \cdot \beta - \beta + 2 \cdot \beta - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = \beta^2 + \beta - 1}$$

$$\text{II/ } \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4/9. Pour $n_0 = 0$ on a $U_0 = 0 \gg -1$ (vrai)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $U_n \gg -1$

Montrons que $U_{n+1} \gg -1$

On a $U_n \gg -1$

et f est strictement

croissante sur $[-1, +\infty[$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f(U_n) \gg f(-1) \\ \Leftrightarrow U_{n+1} \gg -1 \end{array} \right\} \text{ (Vrai)}$$

$\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \gg -1$

✓ Pour tout $x \in [-1, +\infty[$ on a $\Delta: y = x$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$

Càd $\forall x \in [-1, +\infty[$ on a $f(x) \leq x \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ on a,

or $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \in [-1, +\infty[$ } $f(U_n) \leq U_n$

$\Leftrightarrow U_{n+1} \leq U_n \Leftrightarrow (U_n) \text{ est décroissante.}$

Donc : $(U_n) \text{ est décroissante} \Rightarrow (U_n) \text{ est convergente}$

$(U_n) \text{ est minorée par } -1 \Rightarrow \text{vers une limite } l.$

D'autre part on a :

$U_{n+1} = f(U_n)$

$(U_n) \text{ converge vers}$

$f \text{ continue sur } [-1, +\infty[\Rightarrow f \text{ continue en } l$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f(l) = l \end{array} \right\}$$

or $\mathcal{C}_f$ et Δ se coupe en un point unique A d'abscisse -1

Càd l'éq $f(x) = x$ admet une solution unique qui est -1

et comme l est solution de $f(x) = x$

donc

$$l = -1 \text{ càd } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$$

$$2/ V_n = (2+u_0) \times (2+u_1) \times \dots \times (2+u_n)$$

$$a/ \text{ on a : } u_k - u_{k+1} = u_k - f(u_k) = u_k - (u_k - \ln(2+u_k)) = \ln(2+u_k)$$

$$b/ \ln(V_n) = \ln\left((2+u_0) \times (2+u_1) \times (2+u_2) \times \dots \times (2+u_n)\right)$$

$$= \ln(2+u_0) + \ln(2+u_1) + \ln(2+u_2) + \dots + \ln(2+u_n)$$

$$= u_0 - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} - \cancel{u_3} + \dots + \cancel{u_n} - u_{n+1}$$

$$= u_0 - u_{n+1}$$

$$= -u_{n+1}$$

$$c/ \text{ On a : } V_n = -u_{n+1} \Leftrightarrow V_n = e^{-u_{n+1}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_{n+1}} = e^{-(-1)} = e^1 = e$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = e}$$