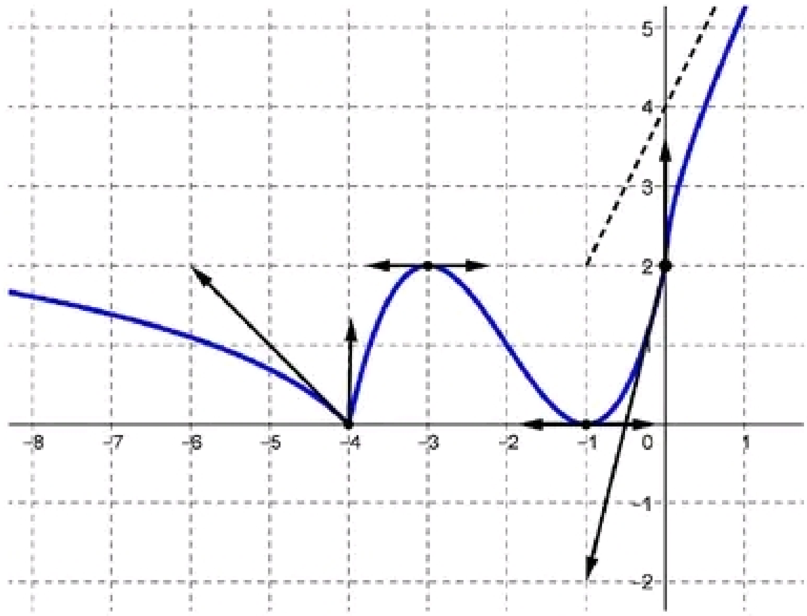
Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	**ELÉMENTS DE CORRECTION** Devoir de Synthèse N°1		
	Mathématiques	4ᵉ Eco.Gestion	2020-2021	2 Heures

Exercice 1



1) a) • $f(-4)=0$ • $f(-3)=2$ • $f(-1)=0$

1) b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=2$

2) a) • $f'(-3)=0$ • $f'(-1)=0$.

2) b) • $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{f(x)}{x+4}=f'_g(-4)=-1$ • $\lim\limits_{x\to(-4)^+} \dfrac{f(x)}{x+4}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-2}{x}=f'_g(0)=4$ • $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-2}{x}=+\infty$.

3) Le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		-4		-3		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$, $x\in[3,+\infty[$

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{9}{x^2})}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{0}}=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-9}-x)(\sqrt{x^2-9}+x)}{\sqrt{x^2-9}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-9}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$$

2) a) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-9}{(x-3)\sqrt{x^2-9}}$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to3^+}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=+\infty$$

alors f n'est pas dérivable à droite en 3.

2) b) $(\mathscr{C})$ admet au point $(3,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3) a) f est dérivable sur $]3,+\infty[$. $\forall x\in]3,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

3) b) Le tableau de variation de f .

x	3 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
f	0 $\nearrow$ $+\infty$

3) c) f est continue, strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f([3,+\infty[)=[0,+\infty[$.

4) a) • $f(5)=4$ • $f'(5)=\dfrac{5}{4}$ • $\left(f^{-1}\right)'(4)=\dfrac{1}{f'\left(\underbrace{f^{-1}(4)}_{5}\right)}=\dfrac{1}{f'(5)}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$

4) b) $T_1: y=f'(5)(x-5)+f(5)$ alors $T_1: y=\dfrac{5}{4}(x-5)+4$ d'où $T_1: y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{9}{4}$

4) c) $T_2: y=(f^{-1})'(4)(x-4)+f^{-1}(4)$ alors $T_2: y=\dfrac{4}{5}(x-4)+5$ d'où $T_2: y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{9}{5}$

Exercice 3

$$A=\begin{pmatrix}25&12&8\\4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1&-4&0\\-2&17&-18\\1&-13&27\end{pmatrix}$$

1) a) ◆ $dét(A)=25\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}12&8\\1&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}12&8\\3&2\end{vmatrix}=25\times1-4\times4+1\times0=9$

◆ $dét(A)\neq0$ alors A est inversible.

1) b) ◆ $A\times B=\begin{pmatrix}25&12&8\\4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-4&0\\-2&17&-18\\1&-13&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9\,I_3$

◆ $A\times B=9\,I_3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{9}A\times B=I_3$ alors $A^{-1}=\dfrac{1}{9}B$

2) a) Soit :
- x le nombre de jouets fabriqués de type voiture ;
- y le nombre de jouets fabriqués de type camion ;
- z le nombre de jouets fabriqués de type bateau.

Après 204 heures de travail et en utilisant $96\,kg$ de bois, l'artisan a fabriqué 76 jouets alors :

◆ La quantité utilisée de bois (en kg) est $2{,}5x+1{,}2y+0{,}8z=96$.

◆ Le nombre d'heures de travail est $4x+3y+2z=204$.

◆ Le nombre de jouets fabriqués est $x+y+z=76$.

Ainsi la situation est traduite par le système suivant :

$$\begin{cases}2{,}5x+1{,}2y+0{,}8z=96\\4x+3y+2z=204\\x+y+z=76\end{cases}\Leftrightarrow\quad (S):\begin{cases}25x+12y+8z=960\\4x+3y+2z=204\\x+y+z=76\end{cases}$$

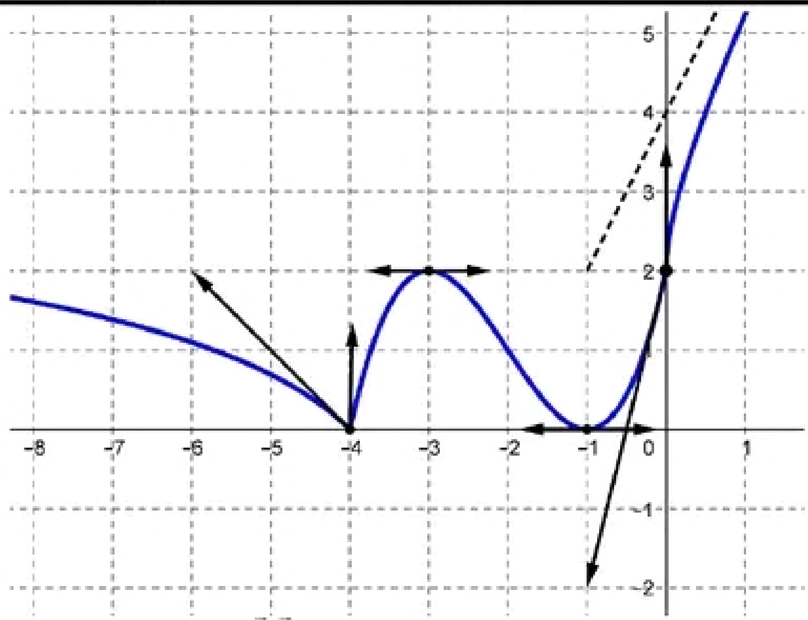
2) b) (S) : $A\cdot X=C$ avec $A=\begin{pmatrix}25&12&8\\4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}960\\204\\76\end{pmatrix}$

2) c) $A\cdot X=C \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot C \Leftrightarrow X=\dfrac{1}{9}B\cdot C=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-4&0\\-2&17&-18\\1&-13&27\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}960\\204\\76\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\20\\40\end{pmatrix}$

Ainsi l'artisan a fabriqué 16 voitures, 20 camions et 40 bateaux.

Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	**DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1**			
	Mathématiques	4ᵉ Eco.Gestion	2020-2021	2 Heures

Exercice 1 (4 points)



- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- La figure ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
- La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$ au voisinage de $-\infty$.
- La droite $\Delta : y = 2x+4$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

En utilisant le graphique

1) a) Déterminer : $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-1)$,

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) a) Déterminer : $f'(-3)$; $f'(-1)$.

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{f(x)}{x+4}$; $\lim\limits_{x\to(-4)^+} \dfrac{f(x)}{x+4}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-2}{x}$.

3) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

$(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que, pour tout $x\in]3,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f est une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4) a) Calculer $f(5)$ et $f'(5)$ puis $\left(f^{-1}\right)'(4)$

b) Ecrire une équation de la tangente T_1 à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au point d'abscisse 5.

c) Ecrire une équation de la tangente T_2 à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 4 .

Exercice 3 (8 points)

1) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & -18 \\ 1 & -13 & 27 \end{pmatrix}$

a) Calculer le déterminant de A et en déduire que A est inversible.

b) Calculer la matrice $A \times B$ et en déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2) Un artisan fabrique trois types de jouets en bois : voitures, camion et bateaux.

Le tableau suivant donne la quantité de bois en kilogrammes et le nombres d'heures de travail nécessaires pour la fabrication d'un jouet de chaque type.

Type de jouet	Voiture	Camion	Bateau
Quantité de bois en kg	2,5	1,2	0,8
Heures de travail pour la fabrication d'un jouet	4	3	2

Après 204 heures de travail et en utilisant $96\,kg$ de bois, l'artisan a fabriqué 76 jouets.

On se propose de déterminer le nombre de jouets fabriqués de chaque type.

a) Montrer que la situation se traduit par le système $(S) : \begin{cases} 25x + 12y + 8z = 960 \\ 4x + 3y + 2z = 204 \\ x + y + z = 76 \end{cases}$

b) Donner l'écriture matricielle du système (S).

c) Déterminer le nombre de voitures, le nombre de camions et le nombre de bateaux fabriqués.