Collège Sadiki	Devoir de contrôle N°1 en mathématiques	Année scolaire 2021-2022
Prof : ABDA Ezeddine		Niveau : Deuxième année
Durée : 60 min		Section : Sciences

Exercice 1 : (5 points)

On propose le tableau de signes suivant du trinôme : $P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	

1. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.
   a. $bc < 0$.
   b. $a + b + c > 0$.
   c. $P\left(-\frac{x^2+2021}{2021}\right) > P\left(-\frac{2022}{x^2+2022}\right)$ pour tout $x \in]-2;-1[$.
   d. L'ensemble des solution de l'inéquation $ax^4 + bx^2 + c < 0$ est $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'expression de $P(x)$ sachant que $P(1) = 2$.

Exercice 2 : (6 points)

1. Soit l'équation $(E): x^2 - \sqrt{7}x - \sqrt{3} = 0$.
   a. Sans calculer le discriminant, montrer que (E) admet deux racines distincts x_1 et x_2.
   b. Sans calculer x_1 et x_2, calculer les expressions suivants : $A = (x_1)^3 + (x_2)^3$ et $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
2. a. Écrire d'un seul radical $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3. Trouver les réels x et y vérifiant :
   a. $\begin{cases} xy = -\sqrt{3} \\ x + y = \sqrt{7} \end{cases}$.
   b. $\begin{cases} x|y| = -\sqrt{3} \\ x + |y| = \sqrt{7} \end{cases}$

Exercice 3 : (4 points)

Soit ABC un triangle et D , E et F trois points définis par : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{DF} = \frac{9}{10}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
   b. En déduire que les points D , E et F sont alignés.
2. a. Donner les coordonnées des points D , E et F dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   b. Redémontrer que les points D , E et F sont alignés.

Exercice 4 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on donne les points $A(-2;3)$, $B(2;4)$, $C(4;-4)$ et $D(0;-5)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.
2. Soit α un réel et $H(\frac{6}{7}\alpha + \frac{4}{7}; -\alpha)$.
   a. Montrer que $H \in (AC)$.
   b. Déterminer α pour que H soit le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
3. On prend $H(-\frac{4}{5}; \frac{8}{5})$. Soit $I(x;y)$ le point d'intersection de la droite (BH) et (AD).
   a. Montrer que les coordonnés de I vérifient le système suivant : $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 6x - 7y = -16 \end{cases}$.
   b. Trouver alors les coordonnés de I.

Ex1

1)a) $\frac{-b}{a} \cdot \frac{c}{a} = ((-2)+(-1)) \cdot ((-2)\times(-1)) = -6 \Rightarrow bc = 6a^2 > 0$

Faux

b) $a+b+c = P(1) < 0$ car $1 \in]-1,+\infty[$ Faux

c) $P\left(-\frac{x^2+2021}{2021}\right) > 0$ et $P\left(-\frac{2022}{x^2+2022}\right) < 0$.

car $-2 < -\frac{x^2+2021}{2021} < -1$ et $-\frac{2022}{x^2+2022} > -1$

d'où $P\left(-\frac{x^2+2021}{2021}\right) > P\left(-\frac{2022}{x^2+2022}\right)$ Vrai

d) . $ax^4+bx^2+c < 0 \Leftrightarrow a(x^2)^2+b(x^2)+c < 0 \Leftrightarrow x^2 \in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$: Vrai

. 2ème méthode : $a(x^2)^2+b(x^2)+c = a(x^2+2)(x^2+1)$ avec $a<0$.

$\rightarrow ax^4+bx^2+c < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Vrai

2°) $P(x) = a(x+2)(x+1)$ et $P(1) = 2$

$\Rightarrow a.(1+2)(1+1) = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

$P(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x+1)$.

Ex2

1°)a) $1\times(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow (E)$ admet deux racines distincts.

b) $A = (x_1)^3+(x_2)^3 = (x_1+x_2)(x_1^2+x_1.x_2+x_2^2)$

$= (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2 - x_1.x_2) = \sqrt{7}((\sqrt{7})^2+\sqrt{3}) = \sqrt{7}(7+\sqrt{3})$.

$B = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1.x_2} = \frac{\sqrt{7}}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

2) a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2+2\times2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$.

b) $x^2-\sqrt{7}x-\sqrt{3}=0$.

$\Delta = (-\sqrt{7})^2 - 4\times(-\sqrt{3}) = 7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{\sqrt{7}-(2+\sqrt{3})}{2}$; $x_2 = \frac{7+2+\sqrt{3}}{2}$

3) a) $X^2-\sqrt{7}X-\sqrt{3}=0 \Rightarrow X = x_1$ ou $X = x_2$.

$S_{\mathbb{R}} = \{(x_1;x_2);(x_2,x_1)\}$

b) . $x = x_1$ et $|y| = x_2$ ou $x = x_2$ et $|y| = x_1 < 0$

impossible

ou $x = x_1$ et $y = x_2$ ou